

唐山市 2021 年普通高等学校招生统一考试第二次模拟演练 数学参考答案

一. 选择题:

1~4. CABD 5~8. DBCD

9. BD 10. ACD 11. CD 12. ABC

二. 填空题:

13. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$; 14. $\frac{21}{16}$;

15. $y = \tan x$, 或 $y = x - \frac{1}{x}$ 或 $y = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x-1, & x > 0, \end{cases}$ 等;

16. $\sqrt{5}+2$.

17. 解:

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$, ...2 分

所以 $S_4 = 4a_1 + 6d = 24$; $S_{10} = 10a_1 + 45d = 120$,

解得 $a_1 = 3$, $d = 2$4 分

故 $S_n = 3n + n^2 - n = n^2 + 2n$5 分

(2) $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$, ...7 分

所以 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \dots + \frac{1}{S_n}$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$
 ...9 分

$$< \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{4}$$
. ...10 分

18. 解:

(1) $\bar{t} = \frac{4+13+23+33}{4} = 18.25$, ...3 分

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} = 70.6375 - 0.25 \times 18.25 = 70.6375 - 4.5625 = 66.075$6 分

(2) 2020 年对应的年份代码 $t = 43$, ...7 分

$M_1 = \hat{a} + \hat{b}t = 66.075 + 0.25 \times 43 = 66.075 + 10.75 = 76.825 \approx 76.83$10 分

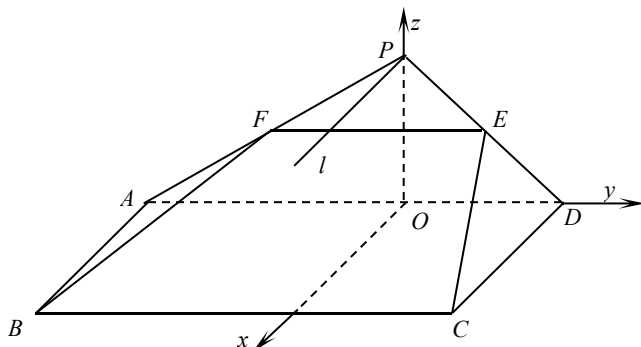
从散点图的发展趋势可以得出: 随着年份代码增加, 人口平均预期寿命提高的越快. 因此, 估计 $M_1 < M$12 分

19. 解:

(1) 由 $EF \parallel AD$, $AD = 2EF$, 可知延长 AF , DE 交于一点设为 P . 过 P 点作 AB 的平行线即为 l , $l \parallel AB$, 理由如下 $\cdots 1$ 分

由题意可知 $AB \parallel CD$, $AB \not\subset$ 平面 CDE , $CD \subset$ 平面 CDE , 则 $AB \parallel$ 平面 CDE .

又 $AB \subset$ 平面 ABF , 平面 $ABF \cap$ 平面 $CDE = l$, 则 $l \parallel AB$. $\cdots 5$ 分



(2) 法一.

由底面 $ABCD$ 为正方形, 且平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$, 得 $AB \perp$ 平面 $ADEF$,

由 (1) 可知 $l \parallel AB$, 则 $l \perp$ 平面 $ADEF$, 所以 $\angle APD$ 即为平面 ABF 与平面 CDE 所成二面角的平面角. $\cdots 9$ 分

由 $EF \parallel AD$, $AD = 2EF$, $DE = 1$, $AF = \sqrt{3}$, 得 $DP = 2$, $AP = 2\sqrt{3}$, 又 $AD = 4$, 则 $AD^2 = DP^2 + AP^2$, 所以 $\angle APD = 90^\circ$.

所以, 平面 ABF 与平面 CDE 所成二面角的大小为 90° . $\cdots 12$ 分

法二. 由 $EF \parallel AD$, $AD = 2EF$, $DE = 1$, $AF = \sqrt{3}$, 得 $DP = 2$, $AP = 2\sqrt{3}$, 又 $AD = 4$, 则 $AD^2 = DP^2 + AP^2$, 所以 $\angle APD = 90^\circ$, $\cdots 7$ 分

由题意可知, P 点向平面 $ABCD$ 引垂线, 垂足落在 AD 上, 设为 O , 则 $OD = 1$.

以 O 为原点, 以 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 y 轴, z 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.

$A(0, -3, 0)$, $B(4, -3, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{3})$, 则 $\overrightarrow{AB} = (4, 0, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (0, 3, \sqrt{3})$, 设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

由 $\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{m} = 0$, $\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{m} = 0$ 得 $\begin{cases} 4x = 0, \\ 3y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$

可取 $\mathbf{m} = (0, 1, -\sqrt{3})$, $\cdots 9$ 分

$D(0, 1, 0)$, $C(4, 1, 0)$, 则 $\overrightarrow{DC} = (4, 0, 0)$, $\overrightarrow{DP} = (0, -1, \sqrt{3})$,

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 同理可得 $\mathbf{n} = (0, \sqrt{3}, 1)$, $\cdots 11$ 分

因为 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$, 所以平面 $PAB \perp$ 平面 PCD , 即平面 $ABF \perp$ 平面 CDE ,

所以, 平面 ABF 与平面 CDE 所成二面角的大小为 90° . $\cdots 12$ 分

20. 解:

(1) 依题意 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}c \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, 可得 $c = 4$,

因为 $C = \frac{\pi}{3}$, 所以 $ab = 8$. …3 分

由余弦定理得 $a^2 + b^2 - ab = c^2$,

因此 $(a+b)^2 = c^2 + 3ab = 40$, …5 分

即 $a+b = 2\sqrt{10}$.

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $2\sqrt{10} + 4$. …6 分

(2) 由 (1) 及正弦定理可得

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2b+a}{ab} = \frac{2b+a}{2c} = \frac{2\sin B + \sin A}{\sqrt{3}},$$
…8 分

$$= \frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) + \sin A}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}\sin(A+\theta)}{\sqrt{3}}, \quad (\text{其中 } \theta \text{ 为锐角, 且 } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}})$$
…10 分

由题意可知 $0 < A < \frac{2\pi}{3}$,

因此, 当 $A+\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{21}}{3}$. …12 分

21. 解:

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$. …1 分

$0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$; $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减. …3 分

即 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(1) = a-1$,

依题意, $a-1 \leq 0$, 故 $a \leq 1$. …5 分

(2) 由 (1) 知, $a > 1$, $0 < m < 1 < n$, $e^{a-1} = \frac{e^{m-1}}{m} = \frac{e^{n-1}}{n}$.

$$\text{所以 } 2e^{a-1} - \left(m + \frac{1}{m}\right) = \frac{2e^{m-1}}{m} - \left(m + \frac{1}{m}\right) = \frac{2e^{m-1} - m^2 - 1}{m};$$

$$2e^{a-1} - \left(n + \frac{1}{n}\right) = \frac{2e^{n-1}}{n} - \left(n + \frac{1}{n}\right) = \frac{2e^{n-1} - n^2 - 1}{n}.$$
…8 分

令 $g(x) = 2e^{x-1} - x^2 - 1$, 则 $g'(x) = 2e^{x-1} - 2x$,

由 (1) 知, $\ln x \leq x-1$, 等号当且仅当 $x=1$ 时成立,

所以 $e^{x-1} \geq x$, 等号当且仅当 $x=1$ 时成立,

于是可得 $g'(x) \geq 0$, 即 $g(x)$ 单调递增,

因此, 当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) < g(1) = 0$; 当 $x > 1$ 时, $g(x) > g(1) = 0$, …11 分

$$\text{所以 } 2e^{a-1} - \left(n + \frac{1}{n}\right) > 0, \quad 2e^{a-1} - \left(m + \frac{1}{m}\right) < 0,$$

$$\text{故 } n + \frac{1}{n} < 2e^{a-1} < m + \frac{1}{m}.$$
…12 分

22. 解:

(1) 由题设得 $P(3, t)$, $A(-a, 0)$, $B(0, -1)$. …1 分

$$\text{则 } \overrightarrow{AP} = (a+3, t), \quad \overrightarrow{BP} = (3, 1+t).$$

所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 9 + 3a + t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 3a + \frac{35}{4}$, …3 分

于是 $t = -\frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 取得最小值 $3a + \frac{35}{4}$, 所以 $3a + \frac{35}{4} = \frac{59}{4}$, 解得 $a = 2$.

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. …5 分

(2) 假设存在点 $P(3, t)$ 满足题设, 设 $D(x_1, y_1)$, 则 $\overrightarrow{AP} = (5, t)$, $\overrightarrow{AD} = (x_1 + 2, y_1)$,

由题意可知存在 $\lambda \in (0, 1)$, 使得 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AP}$, 即

$$\begin{cases} x_1 + 2 = 5\lambda, \\ y_1 = \lambda t, \end{cases} \text{ 整理得 } \begin{cases} x_1 = 5\lambda - 2, \\ y_1 = \lambda t \end{cases}, \text{ 代入 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ 中, 有}$$

$$\frac{(5\lambda - 2)^2}{4} + (\lambda t)^2 = 1 \quad \text{①} \quad \text{…8 分}$$

设 $C(x_2, y_2)$, $\overrightarrow{BP} = (3, t + 1)$, $\overrightarrow{BC} = (x_2, y_2 + 1)$, 同理可得 $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{BP}$, 即

$$\begin{cases} x_2 = 3\lambda, \\ y_2 + 1 = \lambda t + \lambda, \end{cases} \text{ 整理得 } \begin{cases} x_2 = 3\lambda, \\ y_2 = \lambda t + \lambda - 1, \end{cases} \text{ 代入 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ 中, 有}$$

$$\frac{(3\lambda)^2}{4} + (\lambda t + \lambda - 1)^2 = 1 \quad \text{②} \quad \text{…10 分}$$

由①-②得 $\lambda(\lambda - 1)(3 - 2t) = 0$, 且 $\lambda \in (0, 1)$,

解得 $t = \frac{3}{2}$.

故当 $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 时, 四边形 $ABCD$ 为梯形. …12 分

法二.

假设存在点 P 满足题设, 则 $t > 0$, 设 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$.

所以直线 PA 的方程为 $y = \frac{t}{5}(x + 2)$, 直线 PB 的方程为 $y = \frac{t+1}{3}x - 1$.

将 $y = \frac{t}{5}(x + 2)$ 代入 E 得 $(4t^2 + 25)x^2 + 16t^2x + 16t^2 - 100 = 0$,

可得 $x_2 \times (-2) = \frac{16t^2 - 100}{4t^2 + 25}$, 所以 $x_2 = \frac{50 - 8t^2}{4t^2 + 25}$. …8 分

将 $y = \frac{t+1}{3}x - 1$ 代入 E 得 $(4t^2 + 8t + 13)x^2 - 24(t+1)x = 0$,

可得 $x_1 = \frac{24(t+1)}{4t^2 + 8t + 13}$. …9 分

若四边形 $ABCD$ 为梯形, 则 $AB \parallel CD$, 所以 $\frac{|AD|}{|AP|} = \frac{|BC|}{|BP|}$,

于是 $\frac{x_2 + 2}{5} = \frac{x_1}{3}$, 所以 $\frac{20}{4t^2 + 25} = \frac{8(t+1)}{4t^2 + 8t + 13}$, 整理可得 $8t^3 - 12t^2 + 10t - 15 = 0$,

即 $(2t - 3)(4t^2 + 5) = 0$, 解得 $t = \frac{3}{2}$.

故当 $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 时, 四边形 $ABCD$ 为梯形.

…12分